代数叠、平展上同调、基变换

郑维喆

2012 年 10 月 29 日

报告提纲

1. 代数几何
   - 仿射代数集合
   - 概形
   - 代数叠
   - 导出代数几何
2. 平展上同调
   - 概形的平展上同调
   - 代数叠的平展上同调

仿射代数集合

固定代数封闭域 k。对 $P_1, \ldots, P_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$，定义

$$Z(P_1, \ldots, P_m) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

定义

形如 $Z(P_1, \ldots, P_m)$ 的集合称为代数集合。

仿射代数集合

固定代数封闭域 k。对 $P_1, \ldots, P_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$，定义

$$Z(P_1, \ldots, P_m) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

定义

形如 $Z(P_1, \ldots, P_m)$ 的集合称为代数集合。

代数集合 $Z = Z(P_1, \ldots, P_m)$ 的仿射坐标环定义为

$$A = k[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_m).$$

Z 的点和 A 的极大理想一一对应。

Hilbert 零点定理

Hilbert's Nullstellensatz

定理

反变范畴等价：

$$
\begin{aligned}
\{\text{代数集合}\} &\simeq \{k\ \text{上有限生成既约交换代数}\} \\
Z &\mapsto Z\ \text{的仿射坐标环} \\
A\ \text{的极大理想集} &\leftarrow A
\end{aligned}
$$

概形
Schemes

$h\colon R\to S$ 是交换环同态，$\mathfrak{m}$ 是 S 的极大理想，$h^{-1}(\mathfrak{m})$ 未必是 R 的极大理想。

定义

交换环 R 的理想 I 称为素理想，如果对所有 $x,y\in R$，$xy\in I$ 推出 $x\in I$ 或者 $y\in I$。
R 的素理想集称为 R 的素谱（简称谱）$\mathrm{Spec}(R)$。

环同态 $h\colon R\to S$ 诱导影射 $\mathrm{Spec}(S)\to\mathrm{Spec}(R)$，把 $\mathfrak{p}$ 映到 $h^{-1}(\mathfrak{p})$。

概形
Schemes

$h\colon R\to S$ 是交换环同态，$\mathfrak{m}$ 是 S 的极大理想，$h^{-1}(\mathfrak{m})$ 未必是 R 的极大理想。

定义

交换环 R 的理想 I 称为素理想，如果对所有 $x,y\in R$，$xy\in I$ 推出 $x\in I$ 或者 $y\in I$。
R 的素理想集称为 R 的素谱（简称谱）$\mathrm{Spec}(R)$。

环同态 $h\colon R\to S$ 诱导影射 $\mathrm{Spec}(S)\to\mathrm{Spec}(R)$，把 $\mathfrak{p}$ 映到 $h^{-1}(\mathfrak{p})$。

反变范畴等价：$\{$仿射概形$\}\simeq\{$交换环$\}$。
概形由仿射概形粘合而成。

EGA

Alexander Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique, Publications mathématiques de l'I.H.É.S.

编号	卷号	出版年	页数
EGA I	4	1960	224
EGA II	8	1961	218
EGA III	11, 17	1961–63	$163+87$
EGA IV	20, 24, 28, 32	1964–67	$255+227+251+357$
EGA I 新版		1971	466

SGA

Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie,
Lecture Notes in Mathematics.

编号	讨论年	卷号	出版年	页数
SGA 1	1960–61	224	1971	447
SGA 2	1961–62		1968	287
SGA 3	1962–64	151–153	1970	$564+654+529$
SGA 4	1963–64	269, 270, 305	1972–73	$525+418+640$
SGA $4\frac{1}{2}$		569	1977	312
SGA 5	1965–66	589	1977	484
SGA 6	1966–67	225	1971	700
SGA 7	1967–69	288, 340	1972–73	$523+438$

函子的语言

概形 X 决定函子

$$\begin{aligned} h_X \colon \mathrm{CRing} &\to \mathrm{Set} \\ R &\mapsto X(R) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), X). \end{aligned}$$

其中 CRing 是交换环的范畴，Set 是集合的范畴。
同构于某个 h_X 的函子称为可表函子。

函子的语言

概形 X 决定函子

$$\begin{aligned} h_X\colon \mathsf{CRing} &\to \mathsf{Set} \\ R &\mapsto X(R) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), X). \end{aligned}$$

其中 CRing 是交换环的范畴，Set 是集合的范畴。
同构于某个 h_X 的函子称为可表函子。

模函子 (moduli functor)

$$\begin{aligned} M_g\colon \mathsf{CRing} &\to \mathsf{Set} \\ R &\mapsto \{\mathrm{Spec}(R) \text{ 上亏格 } g \text{ 曲线的同构类}\} \end{aligned}$$

不可表。

代数叠

Algebraic stacks

定义

所有态射都可逆的范畴称为广群 (groupoid)。
代数叠是满足一定性质的函子 $\mathsf{CRing} \to \mathsf{Gpd}$，其中 Gpd 是广群组成的 2-范畴。

代数叠

Algebraic stacks

定义

所有态射都可逆的范畴称为广群 (groupoid)。
代数叠是满足一定性质的函子 CRing $\to$ Gpd，其中 Gpd 是广群组成的 2-范畴。

例子

模叠

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_g\colon \mathrm{CRing} &\to \mathrm{Gpd}\\ R &\mapsto \mathrm{Spec}(R) \text{ 上亏格 } g \text{ 曲线的广群}.\end{aligned}$$

是代数叠。

2-范畴

2-Categories

范畴有对象（0-胞腔）、态射（1-胞腔）。
2-范畴有对象（0-胞腔）、态射（1-胞腔）、2-胞腔。

$$\bullet \qquad\qquad \bullet \to \bullet \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

2-范畴

2-Categories

范畴有对象（0-胞腔）、态射（1-胞腔）。
2-范畴有对象（0-胞腔）、态射（1-胞腔）、2-胞腔。

$$\bullet \qquad\qquad \bullet \to \bullet \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

例子

- 所有范畴组成 2-范畴 Cat：对象是范畴，态射是函子，2-胞腔是自然变换。
- 所有广群组成 2-范畴 Gpd。
- 所有代数叠组成 2-范畴。

高阶代数叠

Higher algebraic stacks

定义

所有 1-胞腔和 2-胞腔都可逆的 2-范畴称为2-广群。
代数 2-叠是满足一定性质的函子 $\mathsf{CRing} \to \mathsf{Gpd}_2$，其中 Gpd_2 是 2-广群组成的 3-范畴。

高阶代数叠

Higher algebraic stacks

定义

所有 1-胞腔和 2-胞腔都可逆的 2-范畴称为2-广群。
代数 2-叠是满足一定性质的函子 $\mathrm{CRing} \to \mathrm{Gpd}_2$，其中 Gpd_2 是 2-广群组成的 3-范畴。

定义

∞-广群是 Kan 复形。
高阶代数叠是满足一定性质的函子 $\mathrm{CRing} \to \mathrm{Gpd}_\infty$，其中 Gpd_∞ 是 ∞-广群组成的 ∞-范畴（又称空间的 ∞-范畴）。

∞-范畴是满足一定条件的单纯集合 (simplicial set)，有任意维胞腔。

$$\bullet \qquad\qquad \bullet \to \bullet \qquad\qquad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \end{tikzcd} \qquad\qquad \cdots$$

高阶代数叠

Higher algebraic stacks

满足一定性质的函子 $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$。下表中首列是 $\mathcal{R}$，首行是 $\mathcal{S}$。

	Set	Gpd_∞
CRing	概形	高阶代数叠

高阶代数叠、导出叠、谱叠

Higher algebraic stacks, Derived stacks, Spectral stacks

满足一定性质的函子 $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$。下表中首列是 $\mathcal{R}$，首行是 $\mathcal{S}$。

	Set	Gpd_∞	
CRing	概形	高阶代数叠	
单纯交换环的 ∞-范畴 (simplicial commutative rings)		导出叠	导出代数几何
$\mathbb{E}_\infty$-环的 ∞-范畴		谱叠	谱几何

DAG

Jacob Lurie
Higher Topos Theory, Annals of Mathematics Studies 170, Princeton University Press, 2009, 931 pages.
Higher Algebra, 1078 pages.
Derived Algebraic Geometry, V, VII–XIV, 1000+ pages.

报告提纲

1. 代数几何
   - 仿射代数集合
   - 概形
   - 代数叠
   - 导出代数几何
2. 平展上同调
   - 概形的平展上同调
   - 代数叠的平展上同调

平展上同调

Étale cohomology

定义

概形间态射 $f\colon U \to X$ 是平展的，如果它是光滑的（Jacobi 判则）且相对维数是 0。

对任意概形 X，打到 X 的平展态射定义了 X 的平展拓扑斯 (topos)X_{et}。考虑 $\mathrm{H}^i(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$，其中交换环 Λ 满足 $n\Lambda = 0$，n 在 X 上可逆，或者 $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell$，$\ell$ 在 X 上可逆。

平展上同调

Étale cohomology

定义

概形间态射 $f\colon U \to X$ 是平展的，如果它是光滑的（Jacobi 判则）且相对维数是 0。

对任意概形 X，打到 X 的平展态射定义了 X 的平展拓扑斯 (topos)X_{et}。考虑 $\mathrm{H}^i(X_{\mathrm{et}}, \Lambda)$，其中交换环 Λ 满足 $n\Lambda = 0$，n 在 X 上可逆，或者 $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell$，$\ell$ 在 X 上可逆。

定理 (Grothendieck 迹公式)

设 X 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的分离、有限型概形。

$$\#X(\mathbb{F}_q) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q, \mathrm{H}^i_c(X_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \mathbb{Q}_\ell)).$$

Grothendieck 六则运算

Grothendieck's six operations

- 对任意概形 X，平展层的导出范畴 $\mathrm{D}(X,\Lambda)$ 有内部运算

$$-\otimes-\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)\times\mathrm{D}(X,\Lambda)\to\mathrm{D}(X,\Lambda),\quad \mathcal{H}om\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{D}(X,\Lambda)\to\mathrm{D}(X,\Lambda).$$

- 任意概形间态射 $f\colon X\to Y$ 诱导运算

$$f^*\colon \mathrm{D}(Y,\Lambda)\to\mathrm{D}(X,\Lambda),\quad f_*\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)\to\mathrm{D}(Y,\Lambda).$$

- 凝聚概形间分离、有限型态射 $f\colon X\to Y$ 诱导运算

$$f_!\colon \mathrm{D}(X,\Lambda)\to\mathrm{D}(Y,\Lambda),\quad f^!\colon \mathrm{D}(Y,\Lambda)\to\mathrm{D}(X,\Lambda).$$

基变换

Base change

定理 (SGA 4 XVII 5.2.6)

设有凝聚概形的拉回方 (pullback square)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$

其中 f 分离、有限型。则有自然等价 $g^* f_! \simeq f'_! h^*$。

几何 Langlands 纲领

Geometric Langlands Program

纲领 (Langlands)

F 是整体域。

$$\{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \text{ 的 } n \text{ 维不可约表示}\} \leftrightarrow \{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) \text{ 的不可约尖表示}\}$$

几何 Langlands 纲领

Geometric Langlands Program

纲领 (Langlands)

F 是整体域。

$$\{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \text{ 的 } n \text{ 维不可约表示}\} \leftrightarrow \{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) \text{ 的不可约尖表示}\}$$

纲领 (几何 Langlands，非分歧情形)

X 是完备光滑曲线。

$$\{X \text{ 上秩 } n \text{ 局部系统}\} \leftrightarrow \{\mathrm{Bun}_n \text{ 上 Hecke 特征层}\}$$

其中 Bun_n 是 X 上秩 n 向量丛的模叠。

代数叠的平展上同调

（与刘一峰合作）

对任意代数叠 X，定义了三角范畴 $\mathrm{D}(X,\Lambda)$ 以及六则运算：

- 内部运算
$$-\otimes-,\quad \mathcal{H}om.$$
- 态射 $f\colon X\to Y$ 诱导运算
$$f^*,\quad f_*.$$
- 局部有限型态射 $f\colon X\to Y$ 诱导运算
$$f_!,\quad f^!.$$

代数叠平展上同调的基变换

定理 (刘一峰—郑)

设有代数叠的拉回方 (pullback square)

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$

其中 f 局部有限型。则有自然等价 $g^* f_! \simeq f'_! h^*$。

完

谢谢！